ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Έστω $f \in F(A,\mathbb{R})$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x \in A$ αν $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon,x)>0)(\forall y \in A): |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο σύνολο A εάν $(\forall x \in A)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon,x)>0)(\forall y \in A)$: $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Η επιλογή του δ εξαρτάται από το ε και από το x.

- Εάν, δοθέντος $\varepsilon>0$, μπορώ να βρω $\delta>0$ τ.ω. τα παραπάνω να ισχύουν $\forall x \in A$, δηλαδή $\delta=\delta(\varepsilon)$, τότε λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Δηλαδή, f ομοιόμορφα συνεχής στο $A \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x,y \in A): |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει ότι αν f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε είναι και συνεχής στο A.

Συμβολισμός: Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: A \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται $C(A,\mathbb{R})$, ενώ συμβολίζουμε το σύνολο των ομοιόμορφων συνεχών συναρτήσεων $f: A \to \mathbb{R}$ με $C_u(A,\mathbb{R})$

Ιδιοτητες

- $C(A,\mathbb{R}) \subseteq F(A,\mathbb{R})$
- $C_u(A,\mathbb{R}) \subseteq F(A,\mathbb{R})$
- Το $C(A,\mathbb{R})$ είναι γνήσιο υπερσύνολο του $C_u(A,\mathbb{R})$

Πράγματι, έστω $A=\mathbb{R}$ και $f: A\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική).
Θδο η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι είναι ομ/φα συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε εάν $\varepsilon=1$, $\exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1$

Έστω $y\in\mathbb{R}$ και $x=y+\frac{\delta}{2}$. Τότε $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$

και $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=\left|\left(y+\frac{\delta}{2}\right)^2-y^2\right|=\left|y\delta+\frac{\delta^2}{4}\right|$

Οπότε, εάν $y=\frac{1}{\delta}$, $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\delta}\delta+\frac{\delta^2}{4}\right|=$

$1+\frac{\delta^2}{4}>1$. Επομένως η f δεν είναι ομ/φα συνεχής στο $A=\mathbb{R}$.

Πρόταση

Το σύνολο $C(A,\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(F(A,\mathbb{R}),\rho_u)$ και $C_u(A,\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(F(A,\mathbb{R}),\rho_u)$

Απόδειξη

- Για τον $C(A,\mathbb{R})$

Έστω $(f_n)\subseteq C(A,\mathbb{R})$ με $f_n \xrightarrow{\rho_u} f$, όπου $f\in F(A,\mathbb{R})$
Θδο $f\in C(A,\mathbb{R})$. Έστω $\varepsilon>0$ με $\varepsilon<1$ και $x\in A$. Τότε εφόσον $f_n\xrightarrow{\rho_u} f$ έπεται ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $(\forall n\geq n_0) \Rightarrow$
$\rho_u(f_n,f)<\frac{\varepsilon}{3}<1$, οπότε $\min\{1,\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\}<\frac{\varepsilon}{3}<1$ $\forall n\geq n_0$

$\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n\geq n_0$

οπότε για $n=n_0$ $\sup_{x\in A}|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (1)

Η f_{n_0} είναι συνεχής στο $x \in A$, οπότε $(\exists \delta>0):(\forall y \in A)$
$|x-y|<\delta \Rightarrow |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (2)

Άρα $(\forall y \in A)$ με $|x-y|<\delta$ έχουμε $|f(x)-f(y)| =$

$|f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)+f_{n_0}(y)-f(y)| \leq$

$\leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+|f_{n_0}(y)-f(y)| \leq$

$\leq \sup\limits_{x\in A}|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+\sup\limits_{x\in A}|f_{n_0}(x)-f(x)| \overset{(1),(2)}{\leq}$

$\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Άρα f είναι συνεχής στο $x \in A$ και εφόσον x τυχαίο στοιχείο του A, έπεται ότι f συνεχής στο A.
Οπότε $C(A,\mathbb{R})$ κλειστό του $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$

- Για τον $C_u(A,\mathbb{R})$

Ομοίως, αν πάρω μια ακολουθία ομοιόμορφων συνεχών συναρτήσεων, δηλ. έστω $(f_n) \subseteq C_u(A,\mathbb{R})$ με $f_n \xrightarrow{\rho_u} f$, όπου $f \in F(A,\mathbb{R})$
θδο $f \in C_u(A,\mathbb{R})$, Ομοίως, όπως πριν καταλήγω στην (1)
Εφόσον f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής $(\exists \delta>0)(\forall x,y \in A)$:
$|x-y|<\delta \Rightarrow |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$

Άρα $(\forall x,y \in A)$ με $|x-y|<\delta$ έχουμε $|f(x)-f(y)| \leq$

$|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+|f_{n_0}(y)-f(y)| \leq$

$\sup\limits_{x\in A}|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)+f_{n_0}(y)|+\sup\limits_{x\in A}|f_{n_0}(x)-f(x)| \leq$
λόγω σύγκλισης — λόγω ομοιομ. συνέχειας $<\frac{\varepsilon}{3}$ — λόγω συνέχειας $<\frac{\varepsilon}{3}$

$\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Άρα f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A δηλ $f \in C_u(A,\mathbb{R})$

Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης

- Εάν το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συν/σεων δεν είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.
- Το ίδιο ισχύει αν μια ακολουθία ομοιόμορφων συνεχών συν/σεων δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής συν/ση.

Παραδείγματα

1) Έστω $f_n(x) = \sin^4(\sin x)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο πεδίο ορισμού.

- Εάν $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε $|\sin(k\pi + \pi/2)| = 1$

οπότε $f_n(x) = (\sin 1)^4$. • Εάν $x \neq k\pi + \pi/2$, τότε $-1 < \sin x < 1$

οπότε $\forall x$ με $x \neq k\pi + \pi/2$ $\lim\limits_n (\sin x)^n = 0$

Άρα για $x \neq k\pi + \pi/2$ $\lim\limits_n f_n(x) = \sin^4 0 = 0$.

Επομένως, εάν $f(x) = \begin{cases} (\sin 1)^4, & x = k\pi + \pi/2 \\ 0, & x \neq k\pi + \pi/2 \end{cases}$

Έχουμε $f_n \xrightarrow{κσ} f$. Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ενώ η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.
Επομένως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

2) Έστω $f_n(x) = \min\{1, e^{nx}\}$, $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

- Εάν $x < 0$, τότε $e^{nx} < e^0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Οπότε για $x < 0$

$f_n(x) = e^{nx}$ και $\lim\limits_n f_n(x) = \lim\limits_n e^{nx} = \lim\limits_n \frac{1}{e^{n(-x)}} = 0$

- Εάν $x \geq 0$, τότε $1 \leq e^{nx}$. Οπότε για $x \geq 0$

$f_n(x) = \min\{1, e^{nx}\} = 1$, οπότε $\lim\limits_n f_n(x) = 1$

Οπότε $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο $\mathbb{R}$.

και επειδή $f_n(x) = \begin{cases} e^{nx}, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

και $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = f_n(0)$. Έπεται ότι (f_n) είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Εφόσον $f_n \xrightarrow{κσ} f$ και f όχι συνεχής, έπεται ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Ο $(C(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
$C(A,\mathbb{R}) \subseteq (F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ κλειστό και $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ πλήρης μ.χ.
Άρα $(C(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ πλήρης ως κλειστό υποσύνολο πλήρους μ.χ.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω (f_n) μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n \in C(A,\mathbb{R})$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομομ} f$ στο A, για κάποια $f \in F(A,\mathbb{R})$. Τότε $(\forall a \in A)$ και κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to a$, ισχύει ότι
$\lim\limits_n f_n(x_n) = f(a)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έχουμε ότι $(f_n) \subseteq C(A,\mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{ομομ} f$. Οπότε η f είναι

συνεχής στο A. Άρα εάν $x_n \to a$ ισχύει ότι $\lim_n f(x_n) = f(a)$.

[Εφαρμόζοντας την πρόταση που λέει ότι:
Αν $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ και $\lim_n f_n = f$ ομοιόμορφα στο A και για κάποιο (x_n) το $\lim_n f(x_n) = \ell$ ∃ στο $\mathbb{R}^*$, τότε και $\lim_n f_n(x_n)$ ∃ και είναι ίσο με ℓ. (Σελ. 45)]

Άρα $\lim_n f_n(x_n) = f(a) = \lim_n f(x_n)$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Εάν $(f_n) \subseteq C(A, \mathbb{R})$ τ.ω. για κάποιο $a \in A$ $\exists (x_n)$ και (y_n) τ.ω. $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$ και $\lim_n f_n(x_n) \neq \lim_n f_n(y_n)$ τότε η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πλεονεκτήματα ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ: Δεν απαιτείται η εύρεση οριακής συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $f_n(x) = n^2 x (1 - 4x)^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Η (f_n) είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Επίσης $f_n(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_n f_n(0) = 0$

Εάν υπήρχε f τ.ω. $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε θα έπρεπε $\lim_n f_n(0) = f(0) = 0$. Έστω $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $x_n = \frac{1}{n}$. Τότε

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 \frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{n}\right)^{2n} = n\left(1 - \frac{8}{2n}\right)^{2n}$$

$\lim_n \left(1 - \frac{8}{2n}\right)^{2n} = e^{-8}$. Οπότε $\lim_n f_n(x_n) = +\infty$

Άρα η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια f.

Άσκηση
Έστω $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$, $x \in [0,1]$

Να εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $A=[0,1]$

- Εάν $x=0$, τότε $(1-nx)^2 = 1 \neq 0$
- Εάν $x \neq 0$, τότε $x^2+(1-nx)^2 \neq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ η f_n ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Έχουμε $f_n(0)=0$, $\forall n$, οπότε $\lim_n f_n(0)=0$. Εάν $\exists$ f τ.ω.

$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ τότε $\lim_n f_n(0) = f(0)$. Οπότε $f(0)=0$.

- Εάν $x = \frac{1}{n}$, τότε $f_n(x_n) = \dfrac{(1/n)^2}{(\frac{1}{n})^2+(1-1)^2} = 1$ και

$\lim_n f_n(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$. Επομένως, η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$

Άσκηση
Έστω $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0,1]$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $A=[0,1]$

- Εάν $x=0$, τότε $f_n(x) = f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Εάν $x=1$, τότε $f_n(x) = f_n(1) = 0$
- Εάν $x \in (0,1)$. Θέτουμε $a_n = nx^n$, τότε έχουμε

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \dfrac{n+1}{n} \cdot x$

και $\lim_n \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \left|\dfrac{n+1}{n} \cdot x\right| = |x| < 1$.

Επίσης, $a_n \neq 0$ $\forall n$. Έπεται ότι $\lim_n a_n = 0$ (από ΑΠΕΙ Ι, διότι αν επιλέξω λ, τ.ω. $|x| < \lambda < 1$ και $\varepsilon = \lambda - |x|$ τότε εφόσον $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$, έπεται $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \Rightarrow$

$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - |x|\right| < \varepsilon$) Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = \lambda - |x|$

έχουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. για $n \geq n_0$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - |x| + |x|\right|$

$\leq \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - |x|\right| + |x| < \lambda - |x| + |x| = \lambda < 1$ $\forall n \geq n_0$.

$$\text{Οπότε } \left.\begin{aligned} |a_{n_0+2}| &< \lambda |a_{n_0+1}| \\ |a_{n_0+3}| &< \lambda |a_{n_0+2}| \\ &\vdots \\ |a_{n_0+p}| &< \lambda |a_{n_0+p-1}| \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{τις πολλαπλασιάζω}} |a_{n_0+p}| < \lambda^{p-1} |a_{n_0+1}|$$

$\Rightarrow \lim_{p \to +\infty} |a_{n_0+p}| = 0$. Άρα $\lim_n a_n = 0$

Άρα για $x \in (0,1)$, $\lim_n n x^n (1-x) = 0$. Οπότε, εάν

$f(x) = 0$, $x \in [0,1]$ τότε η $(f_n) \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο $[0,1]$.

Όμως, εάν $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, τότε $(x_n) \subseteq [0,1]$ και $x_n \to 1$

$\lim_n f_n(x_n) = \lim_n n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n \cancel{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\cancel{n}} =$

$= \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0 = f(1)$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.
Παρατηρούμε ότι (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ όπου f συνεχής και όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ

1) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και A συμπαγές και $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $f(A)$ είναι συμπαγές

2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, το A είναι συμπαγές αν-ν είναι κλειστό και φραγμένο.

3) Εάν, $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και f συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και f συνεχής $\Rightarrow$ $f(A)$ συμπαγές $\Rightarrow$ $f(A)$ φραγμένο. Άρα εαν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές $C(A, \mathbb{R}) \subseteq B(A, \mathbb{R})$

Πρόταση (Dini)

Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και (f_n) μια μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (δηλαδή $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$ ή $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο A, όπου $f \in C(A, \mathbb{R})$ τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.